◀志望学部を記入してください。

学部

氏名

1

(問1)

$x^3-3x^2+2x-1=0$ は実係数の3次方程式より

解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=3 & \text{—①} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2 & \text{—②} \\ \alpha\beta\gamma=1 & \text{—③} \end{cases}$$

$$(\text{与式})=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$ (∵③)

$=2^2-2\cdot1\cdot3$ (∵①〜②)

$=-2$ //

(問2)

$(1+x+x^2)^k$ の展開式における一般項は

a, b, c を0以上の整数として

$\dfrac{k!}{a!b!c!}x^{2a+b}$ (ただし $a+b+c=k$) —①

(i) $k=1$ のとき

$(1+x+x^2)^1=1+x+x^2$

∴ x^2 の係数は1

(ii) $k\geqq2$ のとき

ここで $2a+b=2$ を満たす (a, b) の組について考える　$b=2-2a$ —②

$b\geqq0$ より $2-2a\geqq0$

$a\leqq1$

a は0以上の整数より $a=0, 1$

∴②より $(a, b)=(0,2)(1,0)$

このとき $a+b+c=k$ より

$(a, b, c)=(0, 2, k-2)(1, 0, k-1)$

ここで k は2以上の整数より

c が0以上の整数であることに適

∴①より x^2 の係数は

$$\frac{k!}{0!2!(k-2)!}+\frac{k!}{1!0!(k-1)!}$$

$=\dfrac{k(k-1)}{2}+k$ (∵ $k\geqq2$)

$=\dfrac{k(k+1)}{2}$

これは(i)のときも成立する。

∴ x^2 の係数は

$$\frac{k(k+1)}{2}$$ //

2

3倍角の公式より

$$\cos\frac{\pi}{3}=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}$$

$$\therefore 4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}=0$$

$$8\cos^3\frac{\pi}{9}-6\cos\frac{\pi}{9}-1=0$$

∴ 整数係数の3次方程式

$8x^3-6x-1=0$ は $x=\cos\frac{\pi}{9}$ を解にもつ —① //

ここで $\cos\frac{\pi}{9}$ が無理数であることを背理法で示す。

$\cos\frac{\pi}{9}$ が有理数であるとする

$\cos\frac{\pi}{9}=\frac{n}{m}$ (m, n は互いに素な整数, $m>0$)

とおく。

ここで①より

$$\frac{8n^3}{m^3}-\frac{6n}{m}-1=0$$

$m>0$ より $8n^3-6m^2n-m^3=0$ —②

$2(4n^3-3m^2n)=m^3$

ここで $4n^3-3m^2n$, m^3 は整数より

m^3 は偶数

m は整数より m は偶数 —③

∴ $m=2n'$ (n' は整数)

∴②より

$8n^3-24n'^2\cdot n-8n'^3=0$

$n^3-3n'^2\cdot n-n'^3=0$ —④

ここで n, n' ともに奇数であるとすると

n^3, $3n'^2\cdot n$, n'^3 は奇数

∴ (④の左辺)は奇数, (④の右辺)は偶数となり不適

n が奇数, n' が偶数であるとすると

n^3 は奇数 $3n'^2\cdot n$, n'^3 はともに偶数

∴ (④の左辺)は奇数 (④の右辺)は偶数となり不適

∴ n は偶数 —⑤

③, ⑤より, これは, m, n が互いに素であることに不適

∴ $\cos\frac{\pi}{9}$ は無理数である。

(Q.E.D) //

3

1

30 /30

2

30 /30