◀志望学部を記入してください。

学部

氏名

1

(問1)

$x^3-3x^2+2x-1=0$ は実係数の3次方程式より
解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=3 & \text{—①} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2 & \text{—②} \\ \alpha\beta\gamma=1 & \text{—③} \end{cases}$$

$$(与式)=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\ (\because ③)$$

$$=2^2-2\cdot1\cdot3\ (\because ①\sim②)$$

$$=-2\ /\!/$$

(問2)

$(1+x+x^2)^k$ の展開式における一般項は
a, b, c を0以上の整数として

$$\frac{k!}{a!b!c!}x^{2a+b}\quad (ただし\ a+b+c=k) \text{—①}$$

(i) $k=1$ のとき

$(1+x+x^2)^1=1+x+x^2$

$\therefore$ x^2 の係数は1

(ii) $k\geqq2$ のとき

ここで $2a+b=2$ を満たす (a, b) の組について考える $b=2-2a$ —②

$b\geqq0$ より $2-2a\geqq0$

$a\leqq1$

a は0以上の整数より $a=0, 1$

$\therefore$ ②より $(a, b)=(0, 2)(1, 0)$

このとき $a+b+c=k$ より

$(a, b, c)=(0, 2, k-2)(1, 0, k-1)$

ここで k は2以上の整数より
c が0以上の整数であることに適
$\therefore$ ①より x^2 の係数は

$$\frac{k!}{0!2!(k-2)!}+\frac{k!}{1!0!(k-1)!}$$

$$=\frac{k(k-1)}{2}+k\quad (\because k\geqq2)$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}$$

これは(i)のときも成立する。

$\therefore$ x^2 の係数は

$$\frac{k(k+1)}{2}\ /\!/$$

1

30 /30

2

3倍角の公式より

$$\cos\frac{\pi}{3}=4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}$$

$$\therefore 4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2}=0$$

$$8\cos^3\frac{\pi}{9}-6\cos\frac{\pi}{9}-1=0$$

$\therefore$ 整数係数の3次方程式
$8x^3-6x-1=0$ は $x=\cos\frac{\pi}{9}$ を解にもつ —① $/\!/$

ここで $\cos\frac{\pi}{9}$ が無理数であることを背理法で示す。

$\cos\frac{\pi}{9}$ が有理数であるとする

$$\cos\frac{\pi}{9}=\frac{n}{m}\ (m, n は互いに素な整数, m>0)$$

とおく。

ここで①より

$$\frac{8n^3}{m^3}-1\frac{6n}{m}-1=0$$

$m>0$ より $8n^3-6m^2n-m^3=0$ —②

$$2(4n^3-3m^2n)=m^3$$

ここで $4n^3-3m^2n$, m^3 は整数より
m^3 は偶数

m は整数より m は偶数 —③

$\therefore$ $m=2n'$ (n' は偶数)

$\therefore$ ②より

$$8n^3-24n'^2\cdot n-8n'^3=0$$

$$n^3-3n'^2\cdot n-n'^3=0 \text{ —④}$$

ここで n, n' ともに奇数であるとすると
n^3, $3n'^2\cdot n$, n'^3 は奇数

$\therefore$ (④の左辺)は奇数、(④の右辺)は偶数となり不適

n が奇数、n' が偶数であるとすると
n^3 は奇数 $3n'^2\cdot n$, n'^3 はともに偶数

$\therefore$ (④の左辺)は奇数 (④の右辺)は偶数となり不適

$\therefore$ n は偶数 —⑤

③、⑤より、これは、m, n が互いに素であることに不適

$\therefore$ $\cos\frac{\pi}{9}$ は無理数である。

(Q.E.D) $/\!/$

3

2

30 /30