

問 題

xy 平面上に双曲線 $C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ が与えられている。このとき、双曲線 C に互いに直交する2本の接線を引くことができるような点の集合を S とする。

- (1) 点 $P(a, b)$ を通り、傾きが m である直線 l が C と接するための条件を a, b, m で表せ。
- (2) 集合 S を求め、集合 S の概形をかけ。

解答

(1) $C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

$l: y = m(x-a) + b$

から y を消去することにより, x の 2 次方程式をつくる。

$$\frac{x^2}{3} - \frac{1}{2} \{m^2(x-a)^2 + 2mb(x-a) + b^2\} = 1$$

$$\Leftrightarrow (3m^2-2)x^2 + 6m(b-ma)x + 3(b^2-2mab+m^2a^2+2) = 0 \quad \dots\dots ①$$

l が C と接する条件は, ①が x の 2 次方程式として重解をもつこと。そのためには,

$$3m^2-2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots ②$$

が必要で, ②のもとで, ①の判別式の値が 0 となれば十分。
……(*1)

①の判別式を D_1 とすると,

$$\frac{D_1}{4} = 3^2 m^2 (b-ma)^2 - 3(3m^2-2)(b^2-2mab+m^2a^2+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2-3)m^2 - 2abm + b^2 + 2 = 0 \quad \dots\dots ③$$

以上より, 求める条件は,

$$m \neq \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ かつ } (a^2-3)m^2 - 2abm + b^2 + 2 = 0 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

点 $P(a, b)$ が集合 S に属するための必要十分条件は,
 「②かつ③を満たす実数 m が 2 つ存在し, その積が -1 」

……(*2)

となることである。

まず, $a^2-3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm\sqrt{3}$ ……④が必要で, ……(*3)

さらに m の 2 次方程式としての③の判別式 D_2 が正となることも必要である。 ……(*4)

$$\frac{D_2}{4} = a^2 b^2 - (a^2-3)(b^2+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 3b^2 + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{2} < 1 \quad \dots\dots ⑤$$

このとき, ③の 2 解の積が,

$$\frac{b^2+2}{a^2-3} = -1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \quad \dots\dots ⑥$$

を満たしていることが必要。

さらに, $m = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ が③の解となつてはいけなから,

$$\frac{2}{3}(a^2-3) \mp 2\sqrt{\frac{2}{3}}ab + b^2 + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}}a \mp b\right)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow b \neq \pm \sqrt{\frac{2}{3}}a \quad \dots\dots ⑦$$

⑥かつ⑦のとき, ④, ⑤は満たされるから,

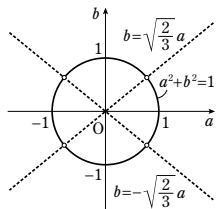
$$P \in S \Leftrightarrow ⑥ \text{ かつ } ⑦$$

すなわち, 集合 S は,

$$S = \left\{ (a, b) \mid a^2 + b^2 = 1 \text{ かつ } b \neq \pm \sqrt{\frac{2}{3}}a \right\}$$

となり, その概形は図の通り。

円 $a^2 + b^2 = 1$ から 4 点を除いたものである。



採点基準

大問配点 20 点

▶ 直線 l の式を示して 1 点

▶ ①を示して 2 点

▶ ②を示して 1 点

▶ (*1) を述べて 2 点

▶ ③を示して 1 点

▶ 答えを示して 1 点

▶ (*2) を述べて 1 点

▶ (*3) を述べて 1 点

▶ (*4) を述べて 2 点

▶ ⑤を示して 2 点

▶ ⑥を示して 2 点

▶ ⑦を示して 1 点

▶ 集合 S を示して 1 点

▶ 図を示して 2 点