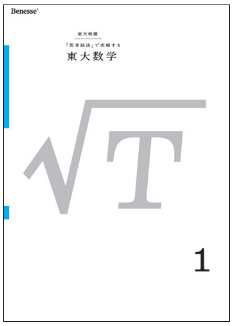
東大特講√T紹介

東大入試での合格ライン突破に向けた３か月（３回）完成集中講座。
東大入試ならではの問題の正しい「解法ルート」が身につく、今までになかった東大合格の確実がある。

開始月自由　３か月完成　１講座から

※教材のお届けは、毎月一回お届け（３か月）と３回一括お届け（一部例外あり）を選択できます。
詳しくは、HPのお申し込み内容をご確認ください。



「思考技法」で攻略する東大数学

受講期間
３か月（３回）完成・毎月添削課題つき

受講費
15,000円（３回分一括払い・消費税込）

お届け教材
テキスト：B5版約40P（解答解説別冊64P挟み込み）　３冊
添削課題：３回
※各月（各回）テキスト１冊、添削課題１回をお届け。

制作チーム
聖光学院中・高等学校　森　英人先生　　ほか
※所属は2005年11月現在

公式適用では解けない、型に当てはまらない問題を考え抜いて解ける力を3か月で身につける。
東大数学は、公式を理解しただけでは解けない。大切なのは、東大が求める思考する力、つまり本質を読みとる「問題把握力」、経験がなくてもその場で思考できる「問題解決力」、自分の頭と手で計算する「計算処理力」を正しく身につけることだ。本講座では、これらの力を確実なものにする。

特長

●規則的なユニット構成
短時間で東大数学の攻略法が身につくよう、超難問や奇問は扱わずに、解法構築の訓練ができる良問に絞った。東大数学は、出題される問題の分野の偏りは少ないと言われるが、ある程度の傾向はある。その結果、整数問題、確率、図形、微分・積分の分野を編集。特に、頻出である微分・積分は、理系用の問題を選択式で設け、演習を積めるよう配慮した。

●問題の配列に特長
問題の解答プロセスに合わせて、「ステップアップ式」と「組み合わせ式」とをご用意。難解と言われる東大数学も基礎的な問題の融合で考えることができる。まずは、東大数学の象徴ともいえる整数問題から講座をスタート。難しい整数問題でさえ、段階を踏むことで東大の過去問が解けるようになることを体感できる。東大の過去問で重要な要素が入った問題を演習し、次に実際の過去問にチャレンジ。これを繰り返すことで、過去問に対する自信をつけていく。

●解答のプロセスを解説
問題文をどう読み解き、どう考えて解答の方針を立てるのかがわかるコーナー（「思考（試行）錯誤」）を設置。また別解も豊富に載せ、それぞれに対し「計算が大変になる」「この時点で気づくべき」などの評価も紹介する。

東大レベル完成問題

1 2 3

3 以上9999以下の奇数aで，a^2-aが10000で割り切れるものをすべて求めよ。

（2005年度　東京大・前期・文理共通）

演習問題 1, 2 のまとめ

構築

この章の演習問題で学習したことをまとめると次のようになる。

[1] 問題文を式にすること

完成問題では，a^2-aが10000で割り切れることから，$a^2-a=10000k$（kは自然数）のようにおくことができる。このときkについてはきちんと定義しておくこと。

[2] 文字式は因数分解し，数は素因数分解する

完成問題では，$a^2-a=a(a-1)$，$10000=2^4\times5^4$のように考える。

[3] 互いに素であるものを見極め，両辺を比較する

演習問題２で，連続する２つの自然数は互いに素であることは学習した。

[4] 合同式の計算に慣れておくこと

現行課程では扱っていない事柄だが，合同式は計算を簡単にしてくれるのでぜひマスターしておこう。

東大レベル完成問題

問題文より読みとれること　解釈

解釈のヒント

題意は，演習問題２よりもストレートで言い換える必要がない。その上，文字も指定されているので，即座に式で表すことを考えよう。

思考錯誤

まずは問題文を読んで，少しだけ計算してみよう。
整数問題を解くときには，まずは問題文にある式a^2-aと数10000を因数分解や素因数分解をしてから問題文を読み直してみよう。
a^2-aが10000で割り切れるようにするのだから，「$a^2-a=10000k$（kは自然数）」のようにおくことができる。ここで注意することは，勝手に自分で定義したkをきちんとどのようなものであるか書いておくことだ（ここでは自然数）。
また，問題文中のaは奇数というところに注意すると，$a-1$は偶数であることが分かるから，$a-1$は2^4の倍数であることが読み取れる。それでは，５は１つも含んでいないのだろうか。
演習問題２では，「**連続した２つの自然数は互いに素である**」ということを確認した。したがって，aと$a-1$は連続する２整数だから互いに素ということになる。それでは，「互いに素」とはどういうことを意味するのであろう。「互いに素」とは１以外に同じ約数をもたないという意味である。つまり，５という約数は，aまたは$a-1$のどちらか一方だけになければならないということなのである。
では，すでに2^4を約数としてもっている$a-1$が5^4も約数としてもっていたらどうなるだろうか。
$a-1$は10000の倍数ということになり，aも少なくとも10000よりは大きくなるので，問題に当てはまるようなaが存在しない。

解答

題意より，

$$a^2-a=10000k\ （k\text{は自然数}）$$

を満たすaを求めればよいから，

$$a(a-1)=2^4\times5^4\times k$$

ここで，aは奇数より，$a-1$は偶数である。さらに，aと$a-1$は隣り合った整数で，これらは「互いに素」である。

よって，奇数aは5^4（$=625$）の倍数で，偶数$a-1$は2^4（$=16$）の倍数である。

そこで，625の倍数で，３以上9999以下の奇数aとして考えられるのは

625，1875，3125，4375，5625，6875，8125，9375の８通り

である。このうち，１つ前の数が16の倍数となるのは625だけである。このとき，$a-1$は624である。

構築のヒント

▸▸題意の式化は楽にできる。

▸▸積の形へ変形。

▸▸連続した2つの自然数が互いに素であることは演習問題2と同様。
互いに素なaと$a-1$のうち，奇数であるaは2なる素因数は持たず，逆に偶数である$a-1$は5なる素因数を持たない。

求めるaの値は,

$a=625$ ……(答)

【別解】(aは625の倍数で,$a-1$は16の倍数より)

$$\begin{cases} a=625x \\ a-1=16y \end{cases} \quad (x,\ y\text{は互いに素な自然数})$$

とおいてaを消去すると,

$625x-1=16y$

ゆえに,$y=\dfrac{625x-1}{16}=\dfrac{(16\times39+1)x-1}{16}$

$=39x+\dfrac{x-1}{16}$

yが自然数となるためには,

$\dfrac{x-1}{16}=l$ (lは0以上の整数)

となる必要があるから,

$x-1=16l$

ゆえに,$x=16l+1$

ここで,$3\leqq a\leqq 9999$より,

$3\leqq 625x\leqq 9999$

$3\leqq 625(16l+1)\leqq 9999$

ゆえに,$3\leqq 10000l+625\leqq 9999$

これを満たす整数lは0のみであるから,

$a=625$ ……(答)

【不定方程式$625x-1=16y$の解法】

《その1》特殊解による解法

$625x-16y=1$

$625\times1-16\times39=1$

辺々引くと,

$625(x-1)-16(y-39)=0$

ゆえに,$625(x-1)=16(y-39)$

625と16は互いに素だから,

$x-1=16l$ (lは0以上の整数)

ゆえに,$x=16l+1$

《その2》合同式による解法

範囲が限られているので,625の倍数を具体的に書き出しても,さほど大変ではない。

▸▸x,yの不定方程式を解くことになるが,係数の小さいyについて解くことで解決する。または,特殊解や合同式を用いて解くこともできる。

▸▸aの変域から整数lの値を絞り込む。

発信のヒント

▸▸aが複数解存在するような印象を与える問題文に惑わされないように。

▸▸不定方程式を満たす1組の解が見つけられた場合の解法。ここでは(1,39)を利用したが,

625=16×39+1

に気づけば見つけやすい解である。

▸▸合同式については,

「思考技法」で攻略する　東大数学　見本
※ご紹介している内容・デザインは変更になる場合があります　※詳しいカリキュラムはHPでご案内しています

$$625x = 16y + 1$$

mod 16において，

$625 \equiv 1$ より $625x \equiv x$

$16y \equiv 0$ より $16y + 1 \equiv 1$

ゆえに，$x \equiv 1 \iff x = 16l + 1$（$l$は 0 以上の整数）

「参考」を読もう。

参考 合同式

整数を扱う上で，分類や表現方法を楽にしてくれるのが「合同式」である。
例えば，すべての整数を 3 で割った余りで分類するとき，kを整数として，

{余りが 0 となる整数} ＝ $\{3k\}$ ＝ $\{\cdots,\ -9,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$
{余りが 1 となる整数} ＝ $\{3k+1\}$ ＝ $\{\cdots,\ -8,\ -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots\}$
{余りが 2 となる整数} ＝ $\{3k+2\}$ ＝ $\{\cdots,\ -7,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots\}$

という 3 つの集合に分けられる。このとき，

同じ集合内の要素どうしは「3を法として合同」

といい，記号で「$-5 \equiv 1 \pmod 3$」などと表す。
注：割られる数が負の整数の場合も，$-5 = 3 \times (-2) + 1$のように「**余りは常に割る数より小さい0以上の整数**」で考える。

［定義］$a-b$がmの整数倍のとき，

「aはmを法（modulus）としてbと合同」

といい，記号で

「$a \equiv b \pmod m$」（読み方は，『a合同bモデューロ（モド）m』）

と書く。

この定義により，次の**同値律**と呼ばれる 3 式が成り立つ。

［定理］mod mにおいて，（ⅰ）**反射律**：$a \equiv a$
（ⅱ）**対称律**：$a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a$
（ⅲ）**推移律**：$a \equiv b,\ b \equiv c \Longrightarrow a \equiv c$

この合同式は，普通の等式と同じように，２式の両辺を辺々「加える」「引く」「かける」ことができるという性質をもっている。

［定理］mod mにおいて，$a \equiv b,\ c \equiv d$のとき，
Ⅰ. $a \pm c \equiv b \pm d$（複号同順）
Ⅱ. $ac \equiv bd$
Ⅲ. $a^n \equiv b^n$（nは自然数）

上の定義に従って，$a-b=mh$，$c-d=ml$（h，lは整数）とおけばⅠ，Ⅱは証明できる。また，Ⅲは，条件より$n=1$のとき成り立つのは明らかで，$n=k$での成立を仮定すると，$a\equiv b$と$a^k\equiv b^k$の辺々をかけて$n=k+1$でも成り立つことが示せるから，数学的帰納法によりすべての自然数nで成り立つことがわかる。

このことから合同式は，等式と同じように両辺の「移項」や「累乗」を可能にしてくれる。

例えば，

> 3^{2006}の一の位の数は何か？

という問題も合同式を使えば次のように解くことができる。

十進法の数の一の位は，その数を10で割ったときの余りに等しいから，mod 10において考える。

$3^2=9\equiv-1$（$9+1\equiv 0$より）より$3^4=(3^2)^2\equiv(-1)^2=1$であるから

$$3^{2006}=3^{4\times 501+2}=(3^4)^{501}\cdot 3^2\equiv 1^{501}\cdot 9=9$$

となる。よって，3^{2006}の一の位の数は 9 である。（等号と合同の記号の変化に注意！）

ところが，合同式においては，等式と違って細心の注意を払わなければいけない場合がある。それは，辺々を「割る」場合である。例えば，mod 3において$60\equiv 90$である。このとき，

両辺を 5 で割った$12\equiv 18$は成り立つが，

両辺を 6 で割った$10\equiv 15$は成り立たない。

辺々を「割る」場合に成り立つ定理が，次である。

［定理］mod mにおいて，$ka\equiv kb$が成り立っているとする。

kとmの最大公約数をgとするとき，

mod $\dfrac{m}{g}$ において$a\equiv b$が成立する。

特に，kとmが互いに素なとき，すなわち$g=1$のときは

mod mにおいて$a\equiv b$が成立する。

この定理に従えば，上の例でいうと，$k=5$，$m=3$のときは$g=1$より，

mod 3において，$60\equiv 90 \Longrightarrow 12\equiv 18$

が成り立つことがわかる。この定理の証明は，

［証明］kとmの最大公約数がgより，

$k=gk'$，$m=gm'$（k'とm'は互いに素）

と表される。mod mにおいて，$ka\equiv kb$より$gk'a\equiv gk'b$となるから，

$$gk'a-gk'b=gk'(a-b)\equiv 0$$

すなわち，$gk'(a-b)$は$m=gm'$の倍数で，k'とm'が互いに素だから

$a-b$が$m'=\dfrac{m}{g}$の倍数

にならなければいけない。ゆえに，

$$a\equiv b\left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{g}\right)$$

が成り立つ。

「合同式」は，現行課程外の項目であるので，解答で使用する際には断っておくように。